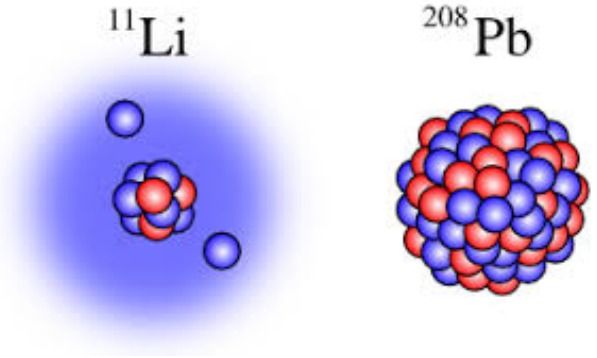
Az atommagok sűrűségeolszlása

1. Magsugár mérések áttekintése

Az atommagok belső szerkezetére vonatkozó első kísérleti tapasztalat a méretük. Ez első közelítésben az atommagok sugarát jelenti (ekvivalens magsugár). Az 1911-ben először elvégzett Rutherford-féle alfa-szóráskísérlet a magsugárra egy felső becslést adott, ami kb. 45 fm. Azóta tudjuk, hogy az atommagok sugara 1-9 fm között változik. Először azt gondolhatnánk, hogy minél nagyobb a tömegszáma egy atommagnak, annál nagyobb a sugara. Ez a legtöbb esetben, általános összehasonlítási feltételek mellett, így is van. Ha a stabil atommagok alapállapotait vizsgáljuk, akkor egy ez nagyon jól teljesülő tendencia. (Ezeket a legkönnyebb vizsgálni, ezért ezeket vizsgálták először meg.) Ha egy adott elem izotópjait nézzük, akkor a stabil izotópokhoz képest a neutrontöbblettel rendelkező izotópokra is igaz ez az állítás. Minél több neutront teszünk bele a stabil atommagba, annál nagyobb lesz. De az adott elem stabil izotópjainál kisebb tömegszámú, azaz néhány neutronnal kevesebbet tartalmazó atommagok nem lesznek kisebbek, hanem ellenkezőleg nagyobbak lesznek. Ha nem egy adott elemet vizsgálunk, akkor pedig nehéz általános összefüggést mondani. Ellenpéldákat viszont már ismerünk. A Z=3-as rendszámú és 11-es tömegszámú lítium atommag mérete közel akkora, mint egy stabil sokkal nagyobb tömegszámú (20-szor akkora) ólom atommagé. Természetesen a két izotóp sűrűségének radiális eloszlása teljesen másként változnak a sugárral (lásd 1. ábra). A továbbiakban a stabil (nem radioaktív) és alapállapotú atommagok méretéről alkotott ismeretienkről lesz szó.



1. ábra. A stabil ólom és a stabilitástól távoli, neutronban gazdag, radioaktív ^{11}Li atommagok méreteinek összehasonlítása

Az atommagok sugara után a bennük lévő töltések eloszlása a második kérdés. A töltés lehet elektromos töltés (a protonok eloszlása) és barion-törltés (protonok + neutronok együttes eloszlása). Az atommagok elektromos töltéseloszlásáról 1953-óta vannak tapasztalatainnk, amikor nagyenergiájú elektronnyalábot sikerült létrehozni a Stanford Egyetemen, a SLAC (Stanford Linear Accelerator Center) gyorsítónál [1]. * Emellett a barion-töltések eloszlását is kérdezhetjük. Ez a protonok és a neutronok együttes eloszlása, azaz az atommag teljes sűrűségeloszlása. Ezek a mérések arra a következtetésre vezettek, hogy az atommagok alakja rendszerint egy forgási ellipszoid, sokszor közel a gömbszimmetrikus eloszláshoz. Ezért az atommagok alakját leíró, a sugár és a töltéseloszlás mellett a következő paraméter a deformációs paraméter, ami a

*[1] R. Hofstadter, „Electron Scattering and Nuclear Structure", Review of Modern Physics Vol. 28. Nr. 3 (1956) page 214. [klikk]

forgási ellipszoid két nagytengelyének az arányát vagy egy abból számolható értéket jelent. Napjainkban kutatott kérdés az olyan atommagok léte, amikor az ellipszoid három nagytengelye mind különböző hosszú. Vannak érdekes kísérletek arról, hogy a teljes sűrűségeloszlás ellipszoidján belül a protonok és a neutronok eloszlása térben különböző és elképzehető hogy például körte-alak is előfordul egyes radon izotópok gerjesztett állapotai esetén a kísérletek szerint.

A stabil alapállapotú magok sugarának meghatározását sokféle módszerrel vizsgálták már a XX. században. Ezek:

a) Anomális Rutherford-szórás,

b) Tükörmagok béta-bomlása,

c) Neutron elnyelődési hatáskeresztmetszet,

d) Müonatomok karakterisztikus röntgensugárzása.

e) Nagyenergiájú elektronok szóródása (R. Hofstadter, Stanford Lineac Accelerator Center)

2. Ekvivalens magsugár

A nem gömb alakú atommagok méretének meghatározására vezetjük be az ekvivalens magsugár fogalmát. Az atommagon belüli (elektromos- vagy barion-) töltéseloszlásra kiszámolt r^2 átlagos értéke alapján állaítjuk meg az elvivalenciát. Az ekvivalens magsugár annak a homogén gömbnek a sugara, melynek $\langle r^2 \rangle$-a azonos az adott nem gömb alakú atommag ugyanilyen átlagával.

$$\langle r^2 \rangle = \iiint \rho(\underline{r}) r^2 dV$$

Itt a $\rho(\underline{r})$ eloszlás egy 1-re normált eloszlás. (megj.: másképpen kell normálni elektromos és nukleáris sűrűségeloszlás esetén.) Ugyanez egy R sugarú homogén gömbre:

$$\langle r^2 \rangle_R = \iiint \rho(\underline{r}) r^2 dV = 4\pi\rho_0 \int_0^R r^4 dr = 4\pi\rho_0 \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R = 4\pi\rho_0 \frac{R^5}{5}$$

A homogén sűrűség nagysága $\rho_0 = 1/\left(\frac{4}{3}R^3\pi\right)$. Ezzel

$$\langle r^2 \rangle_R = \frac{4\pi R^5/5}{4\pi R^3/3} = \frac{3}{5}R^2$$

Ezzel az ekvivalnes magdugár meghatározási módja:

$$r_{ekv}^2 = R^2 = \frac{5}{3}\langle r^2 \rangle_{\rho(\underline{r})} = \frac{5}{3}\iiint \rho(\underline{r}) r^2 dV$$

A fizika BSc során tanult átfogó összefüggés is az ekvivalens magsugárra vonatkozik:

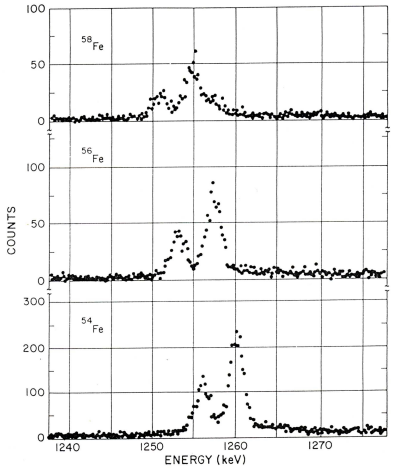
$$r = r_0 \mathrm{A}^{1/3}$$

Ezt a fentebb említett mérési módszerekkel alapállapotú, stabil atommagokra kapták a kísérletekben. A tendencia kb. 5-10%-on belül érvényes. Az r_0 értéke 1,25 fm $\pm$ 0,05 fm, ha elektromos magsugarat mérjük, és kb. 1,44 fm, ha a nukleáris magsugárról van szó.

3. Müonatomok karakterisztikus röntgensugárzása

A müonatom egy olyan atom, melynek egyik elektronját egy μ^- helyettesíti. Amikora müon befogódik az atomba, akkor egyenként lépdel le az egyes héjakon a legmélyebb energiaszintig (K-müonhéj). Az utolsó lépésben bocsátja ki a K_α-sugárzást, melynek energiája függ az atommag méretétől. Az 2. ábra egy kísérleti eredményt mutat be, melyben a vas-atomokat bombázták negatív müonokkal, és a K_α-sugárzást detektálták az 54, 56 és 58-as izotópok esetén külön-külön. Az energiák eltolódása megfigyelhető a spektrumokban.

A K_α-sugárzás a $2p \to 1s$ alhéjak közötti átmenetet jelenti. A finomfelhasadás figyelembevételével két vonalra hasad fel a K_α-energiája: $2p_{1/2} \to 1s_{1/2}$ és a $2p_{3/2} \to 1s_{1/2}$. A perdületmegmaradást leíró kiválasztási szabály a mellékkvantumszámra érvényes. A kvantummechanikai perdületvektorok összeadási szabálya alapján mindkét átmenet lehetséges mert $|1/2 - 1/2| \leq 1 \leq 1/2 + 1/2$ fennáll. A $2p_{3/2}$ pályán 4 féle spinbeállás lehetséges, a $2p_{1/2}$ pályán csak 2. Ezért van a két felhasadt vonal intenzitásának 2:1-es aránya. A $2p_{3/2}$ energiája magasabban helyezkedik el, mint a $2p_{1/2}$, a spin-pálya kölcsönhatás előjele ilyen. Ezért a magasabb csúcs energiája nagyobb.



The muonic K X rays in some Fe isotopes. The two peaks show the $2p_{3/2}$ to $1s_{1/2}$ and $2p_{1/2}$ to $1s_{1/2}$ transitions, which have relative intensities in the ratio 2 : 1 determined by the statistical weight $(2j + 1)$ of the initial state. The isotope shift can clearly be seen as the change in energy of the transitions. The effect is about 0.4%, which should be compared with the 10^{-6} effect obtained with electronic K X rays (Figure 3.6). From E. B. Shera et al., *Phys. Rev. C* **14**, 731 (1976).

2. ábra. A vas-müonatomok K_α sugárázása különböző izotópoknál

Mindkét felhasadt K_α-vonal energiáját a következőképpen számolhajuk ki: $E_{K_\alpha} = E_{2p} - E_{1s}$. Vizsgáljuk meg ugyanezeket az energiákat egy hipotetikus pontszerű atommag esetén: $E^0_{K_\alpha} = E^0_{2p} - E^0_{1s}$. A p-elektronpályákon tartózkodó elektronok megtalálási valószínűsége az atommagon belül kb. 0, mert a p-pályáknak csomósíkja van a 0-ban. Ezért az E_{2p} nem érzékeny az atommag méretére, és arra sem, hogy egyáltalán van sugara, vagy pontszerű. Ezért

$$E^0_{2p} = E_{2p}.$$

Ezzel szemben az $1s$ állapotok energiája függ az atommag sugarától, és így például a tömegszámtól is, az adott protonszámú vasatomok esetén.

$$\Delta E = E_{K_\alpha} - E^0_{K_\alpha} = E_{2p} - E^0_{2p} - E_{1s} + E^0_{1s} = E^0_{1s} - E_{1s}$$

Az $1s$ állapot energiája egy Coulomb-potenciálban lévő $\varrho(\underline{r})$ töltéssűrűségű elektronfelhő energiájaként számolható ki, ahol $U(\underline{r})$ az atommag elektrosztatikus potenciálja: $E = \int_V \varrho(\underline{r})U(\underline{r})dV$. Ezzel a fenti energiakülönbség:

$$\Delta E = E^0_{1s} - E_{1s} = \iiint \varrho^0_{1s}(\underline{r})U_{R=0}(\underline{r})dV - \iiint \varrho_{1s}(\underline{r})U_{R>0}(\underline{r})dV$$

A töltéssűrűséget a hullámfüggvényből számoljuk ki. $\varrho_{1s}(\underline{r}) = |\Psi_{1s}(\underline{r})|^2$ Természetesen a hullámfüggvény más lesz az $R = 0$ méretű atommag esetén, mint ha véges méretű atommagról beszélünk, de ezt a különbséget most elhanyagoljuk, mert másodrendűen kicsi:

$$\Delta E = \iiint |\Psi_{1s}(\underline{r})|^2 \big(U_{R=0}(\underline{r}) - U_{R>0}(\underline{r})\big)dV$$

Az $1s$ állapot gömbszimmetrikus, ugyanígy a Coulomb-potenciál is, ezért a térszögek szerinti integrálás eredménye 4π-t ad eredményül, marad a sugár szerinti integrálás, ami esetén az atommag sugaránál (R) nagyobb értékekre a két esetben a potenciál azonos, az 1/r potenciál van mindkét esetben:

$$\Delta E = 4\pi \int_0^R |\Psi_{1s}(\underline{r})|^2 \big(U_{R=0}(\underline{r}) - U_{R>0}(\underline{r})\big) r^2 dr = 4\pi \int_0^R |\Psi_{1s}(\underline{r})|^2 \left(\frac{kZe}{r} - \frac{kZe}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)\right) r^2 dr$$

A müon hullámfüggvénye $\Psi(r) = Ae^{-Zr/a_0}$ a hidrogénatom $1s$ állapotának megfelelően. Az A normálási faktor számolása parciális integrálás segítségével: $e = 4\pi A^2 \int_0^\infty e^{-2Zr/a_0} r^2 dr = 4\pi A^2 \int_0^\infty \frac{a_0}{2Z} e^{-2Zr/a_0} 2r dr = 4\pi A^2 \frac{a_0}{Z}\frac{a_0}{2Z} \int_0^\infty e^{-2Zr/a_0} dr = 4\pi A^2 \frac{a_0^2}{2Z^2}\left[\frac{e^{-2Zr/a_0}}{-2Zr/a_0}\right]_0^\infty = 4\pi A^2 \frac{a_0^2}{2Z^2}\frac{0-1}{-2Z/a_0} = \frac{\pi A^2 a_0^3}{Z^3}$. Ezért $A = \sqrt{\frac{Z^3 e}{\pi a_0^3}}$. Ezzel:

$$\Delta E = 4\pi \frac{Z^3 e}{\pi a_0^3} \int_0^R e^{-2Zr/a_0} \left(\frac{kZe}{r} - \frac{kZe}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)\right) r^2 dr =$$

$$= \frac{4Z^3 e}{a_0^3}\frac{kZe}{R} \int_0^R e^{-2Zr/a_0} \left(\frac{R}{r} - \frac{3}{2} + \frac{r^2}{2R^2}\right) r^2 dr = \frac{4Z^4 ke^2}{a_0^3 R} \int_0^R e^{-2Zr/a_0} \left(Rr - \frac{3}{2}r^2 + \frac{r^4}{2R^2}\right) dr$$

Ha dimenziótlanítjuk az integrált, akkor $x = r/R$ bevezetésével a következő adódik:

$$\Delta E = \frac{4Z^4 ke^2}{a_0^3 R} \int_0^1 e^{-2ZRx/a_0} \left(R^2 x - \frac{3}{2}R^2 x^2 + \frac{R^4 x^4}{2R^2}\right) R dx = \frac{4Z^4 ke^2}{a_0^3} R^2 \int_0^1 e^{-2ZRx/a_0} \left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx$$

Ha az exponenciálist konstans 1-gyel közelítjük, akkor az integrálás könnyen elvégezhető:

$$\Delta E = \frac{4Z^4 ke^2}{a_0^3 R} \int_0^R \left(Rr - \frac{3}{2}r^2 + \frac{r^4}{2R^2}\right) dr = \frac{4Z^4 ke^2}{a_0^3 R} \left(R\frac{R^2}{2} - \frac{3R^3}{2\cdot 3} + \frac{R^5}{5\cdot 2R^2}\right) = \frac{2Z^4 ke^2 R^2}{5a_0^3}$$

De itt a_0 nem az 52 fm-es Bohr-sugár, ami elektronra és Z=1-re érvényes. Hanem ugyanennek a müonra érvényes változata ($m_{\text{müon}} = 207 \cdot m_{\text{elektron}}$), sőt Z=26 esetén. A Bohr-sugár a Bohr-modellből ismert $r = \hbar/(Zmke^2)$ formula alapján a részecske tömegével és az atommag töltésével fordítva arányos. Ezért jelen esetben $a_0/Z = 52$ pm/207/26= 52 pm/5382= 9,6 fm. Ez alig nagyobb a vas atommagjának sugaránál. (Az ólom esetén a müon-sugár kisebb, mint a magsugár.) Ezért a müonatomok hullámfüggvénye érzékeny a mag méretére.

A vas atommag sugara kb. 4,5 fm, ekkor a hullámfüggvény négyzetében (a müon sűrűségeloszlásában) a kitevő maximum $-2\cdot$4,5/9,6-ot ér el. Ez kb. 0,94, és $e^{-0,94}$=0,4. Ezért az exponenciálissal együtt történő integrálás adja a helyes eredményt. Ennek elvégzése házi feladat, és numerikusan nagyon elbonyolítja a kiértékelést, amire az előadás keretei között nincs elég idő. A gondolatmenetet azonban ebben az egyszerűbb esetben is be lehet mutatni.

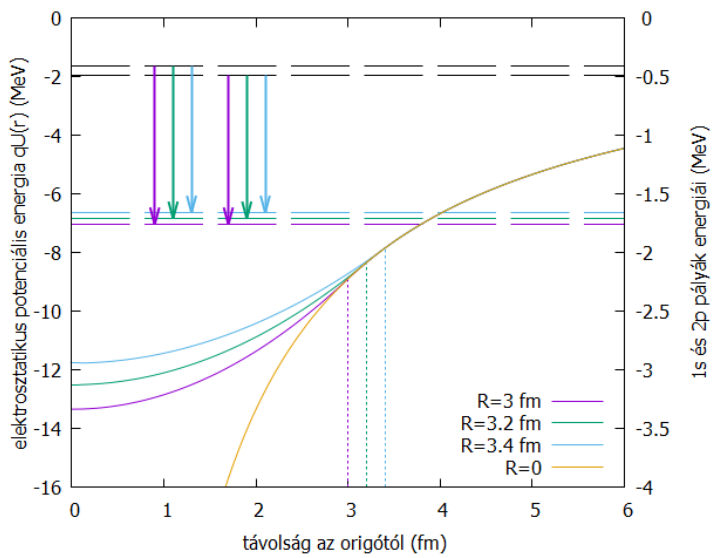
De a pontszerű esetet nem tudjuk megmérni, ezért két különböző tömegszámú vas izotópra történt mérést használunk fel.

$$\Delta E(A) - \Delta E(A+1) = E_{K_\alpha}(A) - E^0_{K_\alpha}(A) - E_{K_\alpha}(A+1) + E^0_{K_\alpha}(A+1) =$$

$$= E_{K_\alpha}(A) - E_{K_\alpha}(A+1) = \frac{2Z^4 ke^2}{5a_0^3}\left(R_A^2 - R_{A+1}^2\right)$$

Ez az érték már mérhető. Ha feltesszük a más mérésekből ismert $R = r_0 A^{1/3}$ összefüggést, akkor r_0 kiszámolható két izotóp méréséből.

$$E_{K_\alpha}(A) - E_{K_\alpha}(A+1) = \frac{2Z^4 ke^2}{5a_0^3} r_0^2 \left(A^{2/3} - (A+1)^{2/3}\right)$$



3. ábra. A különböző magsugarakhoz tartozó elektrosztatikus potenciálok szemléltetése (folytonos görbék, bal oldali skála), valamint a hozzájuk tartozó 1s pályák energiaszintjei (szaggatott vonal, jobb oldali skála). A fekete szaggatott vonalak a 2p pályák energiáit szemléltetik. A kis felhasadások mértéke a láthatóság kedvéért nagyon fel van skálázva. A függőleges nyilak a $K_{\alpha 1}$ és $K_{\alpha 2}$ átmeneteket ábrázolják.

Ha több A-nál is van mérési eredményünk, akkor az $E_{K_\alpha}(A) - A^{2/3}$ pontpárok alkotta egyenes meredekségéből adódik az r_0 és így az atommagok sugara.

Ha pontosan számoljuk az exponenciálist, akkor ezzel a $\Delta E = f(R)$ függvényt határozzuk meg. Ekkor

$$E_{K_\alpha}(A) - E_{K_\alpha}(A+1) = f(r_0 A^{1/3}) - f(r_0 (A+1)^{1/3})$$

összefüggésből lehet, nem feltétlenül egyszerű módon, r_0-t meghatározni.

A házi feladata megoldása.

A dimenziótlanított integrál alakjából látszik, hogy az integrál valamennyire függ R-től. Ha el akarjuk végezni a teljes integrált, akkor először vezessük be az $\alpha = 2\frac{ZR}{a_0}$ paramétert (a magsugár és a müonpálya sugarának aránya). Ezzel a kérdéses integrál

$$I = \int_0^1 e^{-\alpha x} \left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx$$

Ehhez segítségül nézzük meg az $I_n = \int_0^1 e^{-\alpha x} x^n dx$ integrál értékét. Ezt a szokásos parciális integrálással egyenértéku formalizmussal lehet elvégezni.

$$I_n = \int_0^1 \frac{\partial^n}{\partial(-\alpha)^n} e^{-\alpha x} dx = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \int_0^1 e^{-\alpha x} dx = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} \right]_0^1 = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \left(\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} \right)$$

Most $n = 1, 2, 4$-re lesz szükségünk, és $I_n = -\frac{\partial}{\partial \alpha} I_{n-1}$.

$$I_1 = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha} \right) = -\frac{-1}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha}) - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha} = \frac{1 - e^{-\alpha} - \alpha e^{-\alpha}}{\alpha^2}$$

$$I_2 = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1-e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha}}{\alpha^2}\right) = -\left(\frac{-2}{\alpha^3}\left(1-e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha}\right)+\frac{1}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha}-e^{-\alpha}+\alpha e^{-\alpha}\right)\right) =$$
$$= \frac{2-2e^{-\alpha}-2\alpha e^{-\alpha}-\alpha^2 e^{-\alpha}}{\alpha^3}$$
$$I_3 = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{2-2e^{-\alpha}-2\alpha e^{-\alpha}-\alpha^2 e^{-\alpha}}{\alpha^3}\right) =$$
$$= -\left(\frac{-3}{\alpha^4}\left(2-2e^{-\alpha}-2\alpha e^{-\alpha}-\alpha^2 e^{-\alpha}\right)+\frac{1}{\alpha^3}\left(2e^{-\alpha}-2e^{-\alpha}+2\alpha e^{-\alpha}-2\alpha e^{-\alpha}+\alpha^2 e^{-\alpha}\right)\right) =$$
$$= \frac{6-6e^{-\alpha}-6\alpha e^{-\alpha}-3\alpha^2 e^{-\alpha}-\alpha^3 e^{-\alpha}}{\alpha^4}$$
$$I_4 = -\frac{\partial}{\partial\alpha}I_3(\alpha) = -\frac{6e^{-\alpha}-6e^{-\alpha}+6\alpha e^{-\alpha}-6\alpha e^{-\alpha}+3\alpha^2 e^{-\alpha}-3\alpha^2 e^{-\alpha}+\alpha^3 e^{-\alpha}}{\alpha^4} -$$
$$-\frac{-4}{\alpha^5}\left(6-6e^{-\alpha}-6\alpha e^{-\alpha}-3\alpha^2 e^{-\alpha}-\alpha^3 e^{-\alpha}\right) = \frac{24-24e^{-\alpha}-24\alpha e^{-\alpha}-12\alpha^2 e^{-\alpha}-4\alpha^3 e^{-\alpha}-\alpha^4 e^{-\alpha}}{\alpha^5}$$

Ezzel az I dimenziótlan integrál részeit kiszámoltuk.

$$I = I_1 - \frac{3}{2}I_2 + \frac{1}{2}I_4$$

$$I = \frac{\alpha^3-\alpha^3 e^{-\alpha}-\alpha^4 e^{-\alpha}}{\alpha^5} - \frac{3\alpha^2-3\alpha^2 e^{-\alpha}-3\alpha^3 e^{-\alpha}-\frac{1}{2}\alpha^4 e^{-\alpha}}{\alpha^5} +$$
$$+\frac{12-12e^{-\alpha}-12\alpha e^{-\alpha}-6\alpha^2 e^{-\alpha}-2\alpha^3 e^{-\alpha}-\frac{1}{2}\alpha^4 e^{-\alpha}}{\alpha^5} =$$
$$= \frac{\alpha^3-3\alpha^2+12-12e^{-\alpha}-12\alpha e^{-\alpha}+(3-6)\alpha^2 e^{-\alpha}+(-1+3-2)\alpha^3 e^{-\alpha}+(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2})\alpha^4 e^{-\alpha}}{\alpha^5} =$$
$$= \frac{\alpha^3-3\alpha^2+12-e^{-\alpha}\left(12+12\alpha+3\alpha^2+0\alpha^3+\alpha^4\right)}{\alpha^5}$$

4. Nagyenergiájú elektronszórás

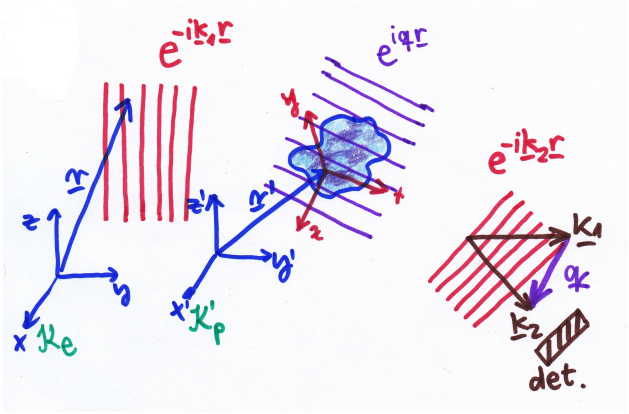
4.1. Az elektron energiája

Mekkora E mozgási energiára kell felgyorsítni egy elektront, hogy de Broglie-hullámhossza az atommag méretének nagyságrendjében legyen? Egy atommag mérete néhány fm, vegyünk egy átlagos magot 3,14 *fm* sugarúnak, és legyen az elektron félhullámhossza ekkora. Ezzel egy minimális mozgási energiát kapunk, amire feltétlenül fel kell gyorsítani az elektront, hogy érzékeny lehessen az elektronszórás egy átlagos atommag belső szerkezetére.

$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow pc = \frac{hc}{\lambda} = \frac{\hbar c 2\pi}{\lambda} = \frac{197\ \text{MeV}\textit{fm}\ 2\pi}{6,28\ \textit{fm}} = 197\ \text{MeV}$$
$$(E+m_e c^2)^2 = p^2c^2 + m_e^2 c^4 = 197^2\ \text{MeV}^2 + 0,511^2\ \text{MeV}^2 \simeq 197^2\ \text{MeV}^2$$

Itt az 1/4 MeV^2-et elhanyagoltuk a kb. 40000 MeV^2 mellett, ami 10^{-5} nagyságrendű elhanyagolás. Ezzel: $E+m_e c^2 = 197$ MeV, azaz $E = 196,5$ MeV. Ilyenkor az elektron ultrarelativisztikus, azaz ilyen nagyenergiájű elektronszórásban lehet az atommagok méretét és belső töltéseloszlását vizsgálni.

h!



4. ábra. Elektron-síkhullámok a rugalmas elektronszórásban

4.2. Hofstadter kísérlete

1953 és 1956 között publikálta a Hoffstadter vezette kutatócsoport azt a kísérletsorozatot, amelyben több atommag töltéseloszlását is megmérték. A kísérletet a Stanford Egyetemen Kaliforniában végezték a SLAC gyorsítónál (Stanford Linear Accelerator Center) és Hofstadter 1961-ben Fizikai Nobel-díjat kapott az eredményekért [klikk].

4.3. A rugalmas elektronszórás leírása

Rugalmas szórást írunk le, ezért az impulusok abszolut értéke azonos, de irányuk megváltozott. Bevezetjük a szokásos impulzus-megváltozás paramétert: $\hbar\underline{q} = \underline{p}_2 - \underline{p}_1$. Ilyenkor $q = |\underline{q}| = 2\frac{p}{\hbar}\sin\frac{\vartheta}{2} = 2k\sin\frac{\vartheta}{2}$. Itt k a hullámszám vektor abszolut értéke, $\hbar\underline{k} = \underline{p}$. A q paraméter tartalmazza a szórási szöget. (Kép egyenlőszárú háromszög). A bemenő és a kimenő elektron hullámfüggvénye is síkhullám, melyek végtelen kiterjedésű elektront írnak le.

A bejövő elektronhullám időfejlődését a rendszer Hamilton-operátora írja le. Messzirőlérkezik egy síkhullám, ami önmaga is jó nagy kiterjedésű, és a szórócenrum potenciáljában ez a síkhullám deformálódni kezd. A szórócentrummal történő kölcsönhatás "után" a bejövő hullám továbbmegy és egy gömbhullám keletkezik, amely minden irányban más intenzitású.

A szóródás valószínűségét a Born-közelításben írjuk le, ahol centrális potenciált feltételezünk, nagyenergiájú bejövő részecskéket és gyenge torzítást a hullámfüggvényen, továbbá az elektron spinjét elhagyjuk (0^+ atommagokon biztosan jó közelítés).

$$M_{12} = \langle\Psi_2|\, V(\underline{r})\, |\Psi_1\rangle \qquad \text{és} \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta) = (...)|M_{12}|^2$$

$$M_{12} = \iiint_V e^{i\underline{k}_2\underline{r}} V(\underline{r}) e^{-i\underline{k}_1\underline{r}} dV$$

A Born-közelítés egyik feltevése a rövid hatótávolságú kölcsönhatás itt nem egyértelműen valósul meg, hiszen a Coulomb-potenciál végtelen hatótávolságú. Ezért a Born-közelítés alkalmazása végtelen síhullám és végtelen hatótávolságú elektromágneses potenciállal végtelen integrált eredményez. Igazából a bejövő elektron nem csupasz atommagon szóródik, hanem a céltárgyban kristályrácsban lévő atomok vannak. Vannak atomi elektronok a mag körül, amik leárnyékolják az atommagot. De ezen elektronfelhő mérete jóval (1000x) nagyobb az atommag méreténél. Az elektron tényleges eltérülését valóban egy majdnem leárnyékolatlan

atommag alakítja ki. Ezért egy az atommag méreténél sokkal nagyobb karakterisztikus méretű Yukawa-potenciál például valóságszerűbb lenne.

$$M_{12} = \iiint_V e^{i\underline{k}_2\underline{r}} V(\underline{r}) e^{-i\underline{k}_1\underline{r}} dV = \iiint_V e^{i\underline{q}\underline{r}} V(\underline{r}) dV$$

$V(\underline{r})$-t a töltéssűrűség egyes elemeinek Coulomb-potenciáljainak összegeként számolhatjuk ki. szórási szög valószínűségeolszlása

$$V(\underline{r}) = \iiint_{V'} \frac{\varrho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dV'$$

Ezzel M_{12}-t ki tudjuk számolni egy kétszeres térfogati integrállal. A vesszős dV' az eltérítő protonok koordinátája és az atommag térfogatán megy végig, az atommag töltéssűrűségének változójaként. A dV vesszőtlen integrál az elektron síkhullámán megy végig, itt az elektron három dimenziós kordinátáira integrálunk.

$$M_{12} = \iiint_V \iiint_{V'} e^{i\underline{q}\underline{r}} \frac{\varrho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dV' dV$$

Az integrálások sorrendjét megcseréljük, akkor a protonok koordinátáit, a vesszős r-eket tartalmazó tagokat kihozhatjuk a másik integrálból. Az elektron koordinátákra történő dV-szerinti integrálás során a koordinátarendszer középpontját behelyezzük az éppen aktuális proton töltés-elem helyére, ezzel az $\underline{x} = \underline{r} - \underline{r}'$ változót vezetjük be. Ez utóbbi egy konstans eltolást jelent az értelmezési tartományon dV integráláskor, ami a $(-\infty, \infty)$ tartomány miatt nem jelent változást, és dV értékét sem változtatja, mert az áttérés Jacobi-determinánsa 0.

$$M_{12} = \iiint_{V'_p} \varrho(\underline{r}') \iiint_{V_e} \frac{e^{i\underline{q}\underline{r}}}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dV dV' = \iiint_{V'_p} \varrho(\underline{r}') I_1(\underline{q}, \underline{r}') dV'$$

Az elektron vesszőtlen koordinátái szerinti integrál (I_1) elvégzése. $\xi = \cos\vartheta$ jelölést használunk, valamint a z-tengelyt a $\underline{q}$ vektor irányában vesszük fel, ezért a ϑ azimutszöget ettől mérjük. Így $\underline{q}\underline{x} = qx\xi$. A φ változótól nem függ az integrandus, ezért az erre történő integrálás 2π eredményt ad:

$$I_1(\underline{q}, \underline{r}') = \iiint_{V_e} \frac{e^{i\underline{q}\underline{r}}}{|\underline{r} - \underline{r}'|} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-1}^{1} \frac{e^{i\underline{q}(\underline{x}+\underline{r}')}}{x} d\xi x^2 dx d\varphi = 2\pi e^{i\underline{q}\underline{r}'} \int_0^{\infty} x \int_{-1}^{1} e^{iqx\xi} d\xi dx =$$

$$= 2\pi e^{i\underline{q}\underline{r}'} \int_0^{\infty} x \left[\frac{e^{iqx\xi}}{iqx} \right]_{-1}^{1} dx = 2\pi e^{i\underline{q}\underline{r}'} \int_0^{\infty} x \left(\frac{e^{iqx} - e^{-iqx}}{iqx} \right) dx = \frac{2\pi}{q} e^{i\underline{q}\underline{r}'} (-i) \int_0^{\infty} \left(e^{iqx} - e^{-iqx} \right) dx$$

Az $I_2(q) = \int_0^{\infty} (e^{iqx} - e^{-iqx}) dx$ integrál nem létezik, avagy nem ad egyértelmű eredményt, mert a sin(qx) függvény integrálja 0-tól végtelenig ilyen. Ezért bevezetünk egy exponenciálisan lecsengő függvényt, aminek állandója 0-hoz tart. Ez ekvivalens azzal, hogy a komplex síkon nem a valós tengeleyen integrálunk, hanem egy kis képzetes számmal eltolva, ezzel kikerüljük a pólusokat.

$$I_2(q) = \int_0^{\infty} (e^{iqx} - e^{-iqx}) dx = \lim_{\alpha \to 0} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} (e^{iqx} - e^{-iqx}) dx = \lim_{\alpha \to 0} I_3(q, \alpha)$$

$$I_3(q, \alpha) = \int_0^{\infty} (e^{iqx - \alpha x} - e^{-iqx - \alpha x}) dx = \left[\frac{e^{(iq-\alpha)x}}{iq - \alpha} \right]_0^{\infty} - \left[\frac{e^{-(iq+\alpha)x}}{-(iq + \alpha)} \right]_0^{\infty} = \frac{e^{iq\infty} e^{-\alpha\infty} - 1}{iq - \alpha} + \frac{e^{-iq\infty} e^{-\alpha\infty} - 1}{iq + \alpha}$$

Itt $e^{-\alpha\infty}$ 0-hoz tart, de az $e^{\pm iq\infty}$ egy egységnyi abszolutértékű komplex szám. Ezért $e^{-\alpha\infty} e^{\pm iq\infty} = 0$.

$$I_3(q, \alpha) = \frac{-1}{iq - \alpha} + \frac{-1}{iq + \alpha} = -\frac{iq + \alpha + iq - \alpha}{(iq + \alpha)(iq - \alpha)} = -\frac{2iq}{(iq)^2 - \alpha^2} = \frac{2iq}{q^2 + \alpha^2}$$

Ez pont a Yukawa-potenciál Fourier-transzformáltja, ami mutatja, hogy a regularizálás helyett egy az atommag méretéhez képest sokkal lassabban lecsengő Yukawa-potenciállal is dolgozhattunk volna, ugyanezt az eredményt kapjuk. Az atomi elektronok leárnyékolják az atommagot egy kívülről az atommag felé száguldó elektronból nézve, és közelítőleg ilyenkor Yukawa-potenciál adódik. Ez adja a közelítésünk valóságszerűségét.

Ezzel $I_2(q)$-t ki tudjuk számolni.

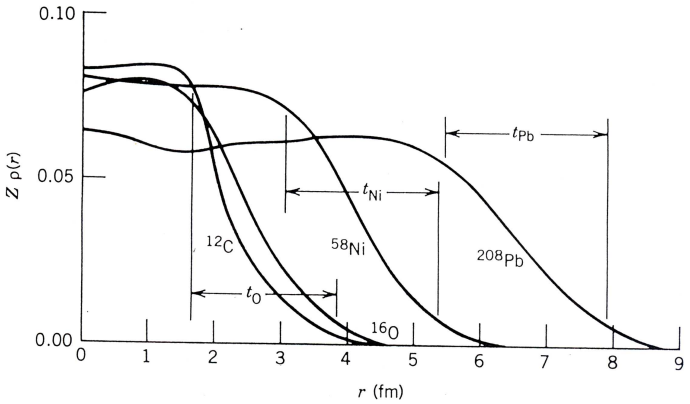
$$I_2(q) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{2iq}{q^2+\alpha^2} = \frac{2i}{q}$$

Visszatéve ezt I_1 fenti képletébe:

$$I_1(\underline{q},\underline{r}') = \frac{2\pi}{q} e^{i\underline{q}\underline{r}'}(-i)I_2(q) = \frac{2\pi}{q} e^{i\underline{q}\underline{r}'}(-i)\frac{2i}{q} = \frac{4\pi}{q^2} e^{i\underline{q}\underline{r}'}$$

Ezt behelyettesíthetjük M_{12} legutolsó formulájába:

$$M_{12} = \iiint_{V_p'} \varrho(\underline{r}')I_1(\underline{q},\underline{r}')dV' = \iiint_{V_p'} \varrho(\underline{r}')\frac{4\pi}{q^2} e^{i\underline{q}\underline{r}'}dV' = \frac{4\pi}{q^2}\iiint_{V_p'} \varrho(\underline{r}')e^{i\underline{q}\underline{r}'}dV' = \frac{4\pi}{q^2}\mathcal{F}(\varrho(\underline{r}'))$$



5. ábra. A nagyenergiás elektronszórás kísérletek eredményeiként kapott sűrűségeloszlások.

Az eredményül kapott (elektromos) töltés-sűrűségeloszlások egy izotróp sűrűségeloszlás sugártól való függését mutatják. Ez alapján az atommagok belsejében egy állandó protonsűrűségű maganyag található, aminek diffúz felszíne van. Ez a konstans sűrűség a stabil atommagokban a kísérletek szerint ugyanakkora. Az ábráról leolvasva, Hofstadter és munkatársai kísérleteiben a ^{12}C-től a ^{58}Ni atommagig a középponti protonsűrűség kb. ρ_p=0,08 $f\mathrm{m}^{-1}$-nek adódott. Ezeknél az atomagoknál a protonok és e neutronok számának aránya kb. 1. (^{12}C: Z=6, N=6, ^{18}O: Z=8, N=8, ^{58}Ni: Z=28, N=30.) Ezekre az atommagokra fennáll, hogy Z/A=0,5. Az ólom esetén Z/A=82/207=0,40. Azaz ebben a protonok sűrűsége az arányaiban több neutron jelenléte miatt kb. 80% csak. Ezzel összhangban van az ábrán látható kb. $\rho_p^{(Pb)}$=0,065 $f\mathrm{m}^{-1}$ mért sűrűség.

A teljes nukleonsűrűségre ezen kísérleti adatokból azt mondhatjuk, hogy az atommagon belül a központ környezetében állandó. A kisebb magokra feljebb adódott 0,08 $f\mathrm{m}^{-1}$ kétszerese, és az ólomra meghatározott 0,064 $f\mathrm{m}^{-1}$ A/Z-szerese ugyanarra a ρ_N=0,16 $f\mathrm{m}^{-1}$ sűrűségre vezet. Ez az állandó nem függ az atommagok tömegszámától. Ez az állandó maganyag sűrűség az atommagok cseppmodelljének egyik alapja.

Ebből a sűrűségből meghatározhatjuk a magsugárra több fajta kísérletből kapott általános összefüggés r_0 együtthatóját.

$$\rho_N = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3A}{4\pi r_0^3 A} = \frac{3}{4\pi r_0^3} = 0.16\frac{1}{f\mathrm{m}^3} \qquad \rightarrow \qquad r_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi 0.16}}\ \ f\mathrm{m} = 1,14 f\mathrm{m}$$

Az irodalomban r_0 értéke 1,2 és 1,44 között változik.

Az eredmények paraméterezése

Az eloszlásokat a Woods–Saxon-eloszlásokkal paraméterezzük.

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-a}{b}}}$$

A kisebb atommagokra ez az eloszlás a Gauss-eloszlással is leírható. Ezt Gombás Pál a Budapesti Műszaki Egyetem tanára a Hofstadter-kísérletek elvégzése előtt már meghatározta elméleti modelljében: P. Gombás, „Difference between the Density Distribution of Neutrons and Protons in Atomic Nuclei", Nature Vol. 171 (1953) pages 979–980. [klikk]

Érdekes kérdés a proton töltéssűrűség eloszlása. A Hofstadter-kísérlet ezt is meghatározta. Az eredmény a Gauss-alakú töltéseloszlás, de ez ez nem a protonok atommagban történő elhelyezkedéséről szól, hanem eggyel mélyebb szintről a kvarkok elhelyezkedéséről a protonon belül.

Az atommagok cseppmodellje nagyban a magsugár eredményekre épül. Arra ugyanis, hogy a nukleonok adott sugarú golyókként képzelhetők el az atommagon belül. Most ezt a képet árnyaljuk azzal, hogy a magnak van egy diffúz felülete, és a protonok (a neutronok analóg módon szintén) sem határozott felszínű objektumok. Kérdés, hogy az atommagon belül az egyes nukleonok Gauss-alakú eloszlása mennyire fed át egymással, valamit ütközési körülmények között, a gravitáció hatására neutroncsillagokban, vagy nagy csillagok összeroppanás előtti vasmagjában a protonok és neutronok mennyire nyomhatók egymásba. Ez a Gaussos diffúz felszín mennyire „rugalmas"? Ez a maganyag kompresszibilitásának kérdése, és a 100 MeV/nukleon-nál nagyobb energiájú ütközésekből lehet rá fényt deríteni.